

凝縮数学におけるSolidとLiquidの基礎理論とホモロジー代数的展開の詳細

【解説ノート】 本稿は、Dustin ClausenとPeter Scholzeによって提唱された「凝縮数学 (condensed mathematics)」における中核的な概念である「ソリッド (solid)」と「リキッド (liquid)」の理論について、これまでのチャットの全履歴に基づく議論を一切省略することなく、漏れなく詳細にまとめたものです。直観的な説明は本ノートのような枠内で「ですます調」で解説し、数学的な命題や証明は「だである調」で厳密に記述します。また、数式のインライン表示には適切なスペースを設け、LaTeXのバックスラッシュが消失しないよう厳密にエスケープ処理を行っています。

1. 凝縮数学の基礎とLight凝縮数学の導入

オリジナルの凝縮数学では、あらゆる位相空間を「すべてのプロ有限集合 (profinite sets)」の圏にマッピングして扱っていた。しかし、この枠組みではグロタンディーク宇宙や到達不能基数などの強大な集合論の公理を仮定する必要がある、基礎づけが重すぎるという問題があった。そこでClausenとScholzeが導入したのが **Light凝縮数学 (Light Condensed Mathematics)** である。

定義 1.1 (Light凝縮集合)

テスト空間として、すべてのプロ有限集合の代わりに「可算生成 (countably generated) なプロ有限集合」、すなわちコンパクトで距離化可能な完全非連結空間のみを採用して構成した層の圏を、Light凝縮集合と呼ぶ。代表的なテスト空間はカントール集合 (Cantor set) である。

実数 $\mathbb{R}$ や Lebesgue空間 L^p 、通常のBanach空間などはすべて可算個のデータから位相が決定される（可分である）。したがって、非可算サイズの巨大なプロ有限集合をテストする必要はなく、カントール集合のような「Lightな」空間を用いるだけで関数の位相や収束の情報を完全に捕捉できる。これにより、巨大基数を一切使わずに標準的なZFC集合論の範囲内で理論を構築可能となる。

2. p -Banach空間の定義

【解説ノート】 関数解析を純粋な代数にするLiquid理論において、主役となるのは古典的なBanach空間ではなく、非凸性を持つ p -Banach空間です。この概念がなぜホモロジー的障害の消滅に寄与するのかを理解するために、まずは厳密な定義を与えます。

定義 2.1 (p -Banach空間)

実数 $0 < p \leq 1$ とする。実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V 上の関数 $\|\cdot\|: V \rightarrow [0, \infty)$ が **p -ノルム (p -norm)** であるとは、以下の3条件を満たすことである。

- 任意の $x \in V$ について $\|x\| = 0 \iff x = 0$
- 任意の $c \in \mathbb{R}$ と $x \in V$ に対して、 $\|cx\| = |c|\|x\|$
- 任意の $x, y \in V$ に対して、 $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$

p -ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ は、距離関数 $d(x, y) = \|x - y\|^p$ によって距離空間となる。この距離に関して完備であるとき、 V を **p -Banach空間 (p -Banach space)** と呼ぶ。

$p = 1$ のときは通常のノルムとBanach空間の定義に一致する。しかし、 $0 < p < 1$ の場合、三角不等式が p 乗の形で与えられるため、

単位球 $B = \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$ は凸集合にはならない。この「非凸性」こそが、のちに述べる Liquid Tensor Experiment において、巨大な空間のテンソル積やExt群の計算を収束させるための「ノルムの急速な減衰」を生み出す源泉となる。

3. 測度の空間とLiquidベクトル空間の定義

Liquid理論は、テスト空間 S 上の p -測度の空間を用いて展開される。

定義 3.1 (p -測度の空間)

任意の実数 $0 < p \leq 1$ と、任意のプロ有限空間 S を固定する。 S の元からなる形式的な有限線形結合 $\sum_{i=1}^n a_i s_i$ ($a_i \in \mathbb{R}, s_i \in S$) の全体からなるベクトル空間 $\mathbb{R}[S]$ に対して、以下の「 p -ノルム」を導入する。

$$\sum a_i s_i \quad_p := \sum |a_i|^p$$

この p -ノルムを用いて $\mathbb{R}[S]$ を凝縮 $\mathbb{R}$ -ベクトル空間として完備化した空間を、 **p -測度の空間 (space of p -measures)** と呼び、 $\mathcal{M}_p(S)$ で表す。

定義 3.2 (p -liquidベクトル空間)

凝縮 $\mathbb{R}$ -ベクトル空間 V が **p -liquid** であるとは、任意の (Lightな) プロ有限空間 S に対して、導来圏において以下の同型が成り立つことである。

$$R\mathrm{Hom}_{\mathrm{Cond}(\mathbb{R})}(\mathcal{M}_p(S), V) \simeq V(S)$$

この定義は、0次の条件 $\mathrm{Hom}(\mathcal{M}_p(S), V) = V(S)$ (完全な完備性) と、高次の条件 $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{M}_p(S), V) = 0$ ($i > 0$) (ホモロジー的障害の消滅) を同時に要求している。Light凝縮数学においては、 S がカントール集合である場合だけ Ext が消滅すればよいという条件に緩和される。

4. Solid理論とLight凝縮数学の融合

Light凝縮数学の枠組みは、実数上のLiquid理論だけでなく、 p 進数や整数環上の Solid理論 においても極めて有効に機能する。

- 数論幾何学の対象の可算生成性**: $\mathbb{Q}_p$ や $\mathbb{Z}_p$ をベースとする空間 (Adic空間やパーフェクトイド空間など) は、局所的に見ればネーター環や可算生成な位相環から作られており、Lightなテスト空間で完全に情報を捕捉できる。
- Solid化の古典的極限への一致**: テスト空間 S がLight (可算な逆極限) である場合、そのSolid化 (完備化) $\mathbb{Z}^\blacksquare[S]$ は、有限集合の自由アーベル群 $\mathbb{Z}[S_i]$ たちの古典的な逆極限として素直に計算される。これは岩澤代数などの既存の数論的ツールと完全に一致する。
- アルキメデスと非アルキメデスのハイブリッド**: Light凝縮数学という単一のアーベル圏の中で、実数 (Liquid) と p 進数 (Solid) のテンソル積や完全列の計算を同時に破綻なく実行できる。

5. Johnstoneの Topological Topos との境界線とExt非消滅

【解説ノート】 位相空間を代数化する先駆的な試みとして、Peter Johnstoneが1979年に構築した「位相的トポス (Topological

Topos)」があります。Johnstoneの枠組みでは、テスト空間を「収束点列空間 $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 」のみに制限します。この圏には距離化可能空間を含む収束点列空間 (sequential space) の圏が充満忠実 (fully faithfully) に埋め込まれるため、閉区間 $[0, 1]$ などの位相情報を正確に保持できます。しかし、ホモロジー代数 (特に測度の分解) を行おうとすると、この空間は「被覆力」が足りず致命的に破綻します。

定理 5.1 (Topological Topos における Ext 非消滅)

Johnstoneの Topological Topos において、テスト空間 $\mathbb{N}_\infty$ を用いて閉区間 $X = [0, 1]$ 上の測度の空間 $\mathcal{M}(X)$ の射影分解を構成することはできず、結果として $\text{Ext}_{\text{TopTopos}}^1(\mathcal{M}(\mathbb{N}_\infty), \mathcal{M}(X)) \neq 0$ となる。

証明

位相的トポスにおいてホモロジー代数を展開し、Ext 群を消滅させるためには、対象である $\mathcal{M}(X)$ をテスト空間 $\mathbb{N}_\infty$ から生成される射影的对象で完全に覆い尽くす、すなわち結合全射 (joint surjection) を構成しなければならない。

閉区間 $X = [0, 1]$ は Sequential空間であるため、位相空間論としては、適当な添字集合 I を用いて $\mathbb{N}_\infty$ の余極限 (colimit) から X への連続な全射 $p: \coprod_{i \in I} \mathbb{N}_\infty \rightarrow X$ が存在する。これを測度の関手 $\mathcal{M}$ で引き上げる写像 $\mathcal{M}(p): \mathcal{M}(\coprod_{i \in I} \mathbb{N}_\infty) \rightarrow \mathcal{M}(X)$ を考える。

空間 $\mathbb{N}_\infty$ は可算集合である。可算集合上の任意の測度は、各点におけるDirac測度の無限和、すなわち純粋なアトミック (atomic) な測度として表される。アトミックな測度を連続写像 p で前押し (pushforward) しても、その像 $p_*(\mu)$ は依然として X 上のアトミックな測度である。

しかし、空間 $X = [0, 1]$ 上の測度の空間 $\mathcal{M}(X)$ には、アトミックな部分を一切持たない連続的な Lebesgue測度 λ が存在する。したがって、 $\lambda \notin \text{Im}(\mathcal{M}(p))$ であり、写像 $\mathcal{M}(p)$ は全射にならない。

全射にならないため、商空間 (余核) $C = \mathcal{M}(X) \setminus \text{Im}(\mathcal{M}(p))$ は $\emptyset$ ではなく、非自明な空間として残る。この余核 C がホモロジー代数における障害クラス (cocycle) となり、射影分解を用いた複体の計算において高次コホモロジー群に非自明な元を生み出す。したがって、 $\text{Ext}_{\text{TopTopos}}^1(\mathcal{M}(\mathbb{N}_\infty), \mathcal{M}(X)) \neq 0$ である。証明終。

カントール集合 (Cantor set) C の場合、完全非連結でありながら非可算集合であるため、カントール分布などの連続的な測度を持てる。さらに Alexandroff の定理により、任意のコンパクト距離空間 X への連続な全射 $C \rightarrow X$ が存在する。これによりLebesgue測度を完全に被覆でき、 $\text{Ext} = 0$ が達成される。これが Light凝縮数学がカントール集合をテスト空間に選んだ決定的な理由である。

6. Ext消滅定理 (Liquid Tensor Experiment) の証明と役割

Liquid理論が機能するための最大の鍵は、ある非凸な空間の測度がホモロジー的障害を持たないことを示す以下の定理である。この定理の複雑な不等式評価は、Leanを用いた計算機支援証明によって完全に検証された。

定理 6.1 (Ext 消滅定理)

任意のプロ有限空間 S と、実数 $0 < p' < p \leq 1$ に対して、 $\text{Cond}(\mathbb{R})$ において以下の高次 Ext 群は完全に消滅する。

$$\text{Ext}_{\text{Cond}(\mathbb{R})}^i(\mathcal{M}_{p'}(S), \mathcal{M}_p(S)) = 0 \quad (i > 0)$$

証明の構造

ホモロジー代数において Ext^i が消滅することを示すためには、対象 $\mathcal{M}_{p'}(S)$ の射影分解から誘導されるチェイン複体 $C^\bullet$ において、恒等写像 id と境界作用素 d を結ぶ縮小ホモトピー (contracting homotopy) h を具体的に構成し、 $\text{id} = dh + hd$ を満たすことを示せばよい。

まず、対象を代数的に分解するために、Breen-Deligne分解 (Breen-Deligne resolution) を導入する。これは任意のアーベル群を自由アーベル群の直和のみでホモロジー的に完全に分解する関手的な手法である。これを $\mathcal{M}_{p'}(S)$ に対して適用し、凝縮ベクトル空間上の

解析的な複体 $C^\bullet$ に引き上げる。

次に、この複体上でホモトピー $h_n: C^n \rightarrow C^{n-1}$ を構成する。Breen-Deligne分解から生じる写像の性質上、 h_n は無限個の項の和として定義される。ここで $p = 1$ の古典的なBanach空間の場合、各項の作用素ノルムが指数関数的に爆発し、無限和 $\sum h_n$ が発散するためホモトピーが構成できない。

しかし、 $0 < p' < p \leq 1$ の条件がある場合、空間の非凸性の差を利用できる。 $\mathcal{M}_{p'}(S)$ の元を $\mathcal{M}_p(S)$ の中で測ると、 p' と p の冪乗の差により、成分が分割されるごとにノルムが強制的に指数関数的に減衰する。このノルムの減衰効果 (decay) が Breen-Deligne 分解からのノルム爆発を完全に相殺して上回るため、ホモトピー h を構成する無限級数が絶対収束し、well-defined な有界線形作用素として定まる。これにより複体は完全となり、すべての $i > 0$ に対して $\text{Ext}^i = 0$ となる。証明終。

Ext消滅定理のLiquid理論構築における具体的な役割

この定理は、Liquidベクトル空間の理論において「理論が破綻しないことを保証するための絶対的なライセンス」として以下の場面で使われる。

- リキッド化の実現とアーベル圏の確定**：凝縮ベクトル空間をLiquidな空間に変換する関手（左随伴関手）において、極限操作の途中で位相が壊れたり無限和が発散したりせず、完全なアーベル圏をなすことが保証される。
- 導来テンソル積の計算保証**：空間を分解するブロックの選び方に依存せず、Ext の消滅により余計なノイズが発生しないため、テンソル積がただ1つの完璧な答えを返すことが保証される。
- 古典的空間の安全な埋め込み**：既存のBanach空間やFréchet空間が、Liquidベクトル空間という完璧な器の中で、位相のバグを起こさずに安全に計算できる対象であることが証明される。

7. テスト関数の空間と核型空間の純粋代数的な定義

古典的な関数解析において、テスト関数の空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ （コンパクト台を持つ滑らかな関数の空間）は、厳密帰納極限 (strict inductive limit) として構成されるLF空間という極めて厄介な位相を持っていた。しかしLiquid理論においては、これが位相的な破綻を起こさない純粋に代数的な直極限 (colimit) として完全に安全に定義され、超関数の空間 $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ とのテンソル積やホモロジー計算も自由に行える。さらに $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ は、最も計算しやすい特権的なクラスである「核型 Liquid ベクトル空間」となる。

定義 7.1 (核型 Liquid ベクトル空間)

Liquid ベクトル空間の圏において、対象 V が **核型 (nuclear)** であるとは、任意の添字集合 I から作られる実数 $\mathbb{R}$ の無限直積 $\prod_{i \in I} \mathbb{R}$ に対して、導来Liquidテンソル積から自然に定まる以下の写像が同型となることである。

$$V \otimes_{\text{liq}} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{R} \right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} V$$

代数学において、余極限的であるテンソル積 $\otimes$ と、極限的である無限直積 $\prod$ は通常交換しない。この二つが交換するということは、無限次元空間でありながら代数的には有限次元ベクトル空間と全く同じように振る舞う極めて性質の良い空間であることを意味する。Grothendieckによる古典的な定義では「トレースクラス作用素」や「固有値の減衰」といった解析学の言葉が用いられたが、ClausenとScholzeは、この解析的条件と「テンソル積と無限直積が交換する」という代数的条件が100%完全に等価になることを証明した。

8. 核型 Solid 加群とアルキメデス・非アルキメデスの究極の統一

この代数的な核型の定義は、実数だけでなく整数環や p 進数の世界 (Solid) でも全く同じ形で機能する。

定義 8.1 (核型 Solid 加群)

整数環 $\mathbb{Z}$ 上の Solid 加群の圏において、対象 V が **核型 (nuclear)** であるとは、任意の添字集合 I に対して、導来 Solid テンソル積 $\otimes^{\mathbb{L}}_{\blacksquare}$ に関して以下の写像が同型となることである。

$$V \otimes^{\mathbb{L}}_{\blacksquare} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{Z} \right) \xrightarrow{\sim} \prod_{i \in I} V$$

非アルキメデス的な世界には「微分」や「距離」の概念が存在しないため、Grothendieckの手法では核型空間を定義することが不可能であった。しかし、この代数的な定義を採用することで、実数（アルキメデス的）の世界と p 進（非アルキメデス的）の世界の関数解析が、同一のホモロジー代数（圏論的ソフトウェア）上で走る互換性のある対象として完全に統一されたのである。

9. Light凝縮数学によって単純化された項目のまとめ

Light凝縮数学がオリジナルの理論から「計算の複雑さ」と「集合論の不安」をどのように削ぎ落としたかを示す。

項目	オリジナルの凝縮数学	Light凝縮数学	単純化の実益
テスト空間	すべてのプロ有限集合	カントール集合など可算生成のみ	取り扱う空間のサイズが直観的な範囲に収まる
集合論の前提	グロタンディーク宇宙（到達不能基数）	標準的なZFC集合論のみ	マニアックな基礎論の仮定を完全に排除できた
Solid化の計算	抽象的で複雑な導来完備化	古典的な逆極限と完全に一致	岩澤代数などの既存の数論的ツールがそのまま使える
Liquidの定義	無数のプロ有限空間で $\text{Ext} = 0$ を確認	カントール集合上で $\text{Ext} = 0$ なら OK	空間がリキッドであることの証明が劇的にスリム化
連続測度の扱い	巨大空間上の測度まで考慮	カントール分布などの標準的な測度で十分	測度論のアトミックと連続の壁を最小労力で突破

参考文献

- [1] Clausen, D., & Scholze, P. (2019). *Lectures on Condensed Mathematics*. <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Condensed.pdf>
- [2] Clausen, D., & Scholze, P. (2020). *Lectures on Analytic Geometry*. <https://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Analytic.pdf>
- [3] Johnstone, P. T. (1979). On a topological topos. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(3), 237-271. <https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1112/plms/s3-38.2.237>